

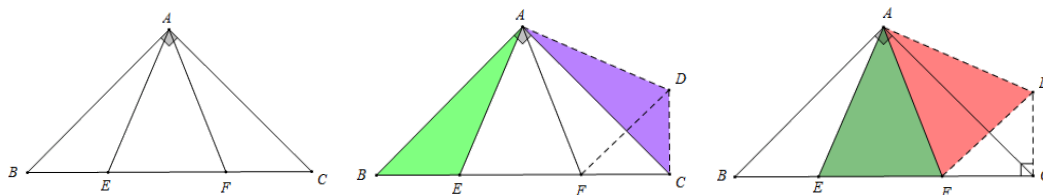
第2讲 旋转基本模型

一、角含半角模型

1. 等腰直角三角形 90° 中含有 45°

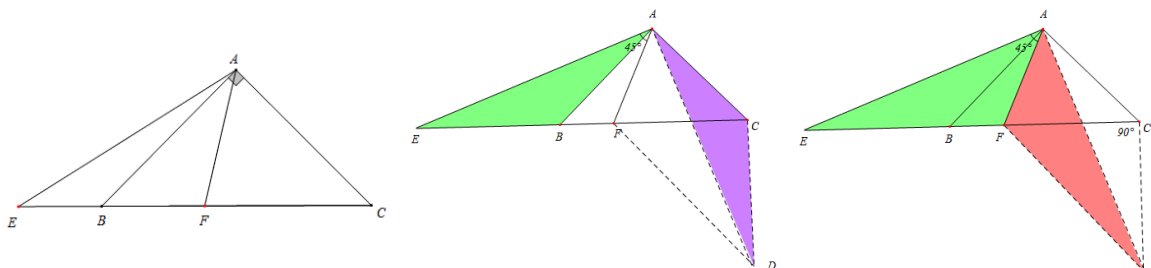
💡 半角在内向外转

如图，已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle EAF = 45^\circ$ 。



💡 半角在外向内转

如图，已知 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle EAF = 45^\circ$ 。



！ 结论： $\triangle AEF \cong \triangle ADF$ ， $EF = DF$ ，

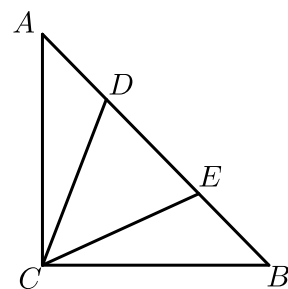
从而推出 $BE^2 + CF^2 = EF^2$ 。（ BE 、 CF 、 EF 关系）

💡 举个“栗子”

栗子1

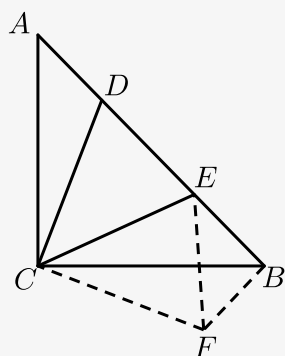
1. 2018~2019学年上海闵行区初三上学期期末第17题4分 ★★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4\sqrt{2}$ ，点 D 、 E 分别在边 AB 上，且 $AD = 2$ ， $\angle DCE = 45^\circ$ ，那么 $DE = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】 过点 B 作 $BF \perp AB$ 且 $BF = AD$ ，连接 CF ， EF 。



$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4\sqrt{2}$ ，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 8$ ， $\angle CBA = \angle A = 45^\circ$ 。

$\because BF \perp AB$ ，

$\therefore \angle ABF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CBF = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle A$ 。

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle A = \angle CBF \\ AD = BF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCF$ (SAS)，

$\therefore CF = CD$ ， $\angle ACD = \angle BCF$ 。

$\because \angle DCE = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle BCF + \angle BCE = 45^\circ$ ，即 $\angle ECF = 45^\circ$ 。

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle FCE$ 中，

$$\begin{cases} CE = CE \\ \angle DCE = \angle FCE = 45^\circ \\ CD = CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle DCE \cong \triangle FCE$ (SAS)，

$\therefore DE = EF$ 。

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中， $BF = AD = 2$ ，

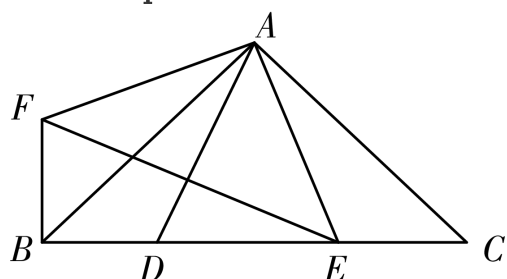
设 $BE = x$ ，则 $EF = DE = 8 - 2 - x = 6 - x$ 。

$$\begin{aligned} \because BE^2 + BF^2 &= EF^2, \\ \therefore x^2 + 2^2 &= (6-x)^2, \\ \text{解得 } x &= \frac{8}{3}, \\ \therefore DE &= 6-x = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

【标注】【知识点】等腰直角三角形中的半角模型

2. 2020~2021学年3月天津和平区天津市益中学校初二下学期月考第19题2分 ★★★

如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， D 、 E 为 BC 上两点， $\angle DAE = 45^\circ$ ， F 为 $\triangle ABC$ 外一点，且 $FB \perp BC$ ， $FA \perp AE$ ，则下列结论：① $CE = BF$ ；② $BD^2 + CE^2 = DE^2$ ；③ $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4}AD \cdot EF$ ；④ $CE^2 + BE^2 = 2AE^2$ ，其中正确的是()



A. ①②③④

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③

【答案】A

【解析】解：① $\because \angle BAC = 90^\circ$ ， $FA \perp AE$ ， $\angle DAE = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle CAE = 90^\circ - \angle DAE - \angle BAD = 45^\circ - \angle BAD,$$

$$\angle FAB = 90^\circ - \angle DAE - \angle BAD = 45^\circ - \angle BAD,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle EAC,$$

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\because FB \perp BC,$$

$$\therefore \angle FBA = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle AEC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore CE = BF, \text{ 故①正确},$$

②：由①中证明 $\triangle AFB \cong \triangle AEC$ ，

$$\therefore AF = AE,$$

$$\because \angle DAE = 45^\circ, FA \perp AE,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle AFD \cong \triangle AED,$$

连接 FD ，

$$\therefore FB = CE,$$

$$\therefore FB^2 + BD^2 = FD^2 = DE^2, \text{ 故②正确,}$$

③: 如图, 设 AD 与 EF 的交点为 G ,

$$\therefore \angle FAD = \angle EAD = 45^\circ, AF = AE,$$

$$\therefore AD \perp EF,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot EG = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{1}{2} EF = \frac{1}{4} \cdot AD \cdot EF,$$

故③正确,

$$\text{④: } \therefore FB^2 + BE^2 = EF^2, CE = BF,$$

$$\therefore CE^2 + BE^2 = EF^2,$$

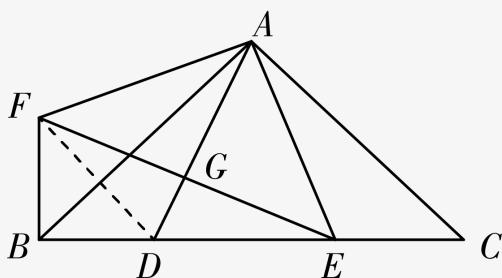
在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $AF = AE$,

$$AF^2 + AE^2 = EF^2,$$

$$\therefore EF^2 = 2AE^2,$$

$$\therefore CE^2 + BE^2 = 2AE^2, \text{ 故④正确.}$$

故选: A.

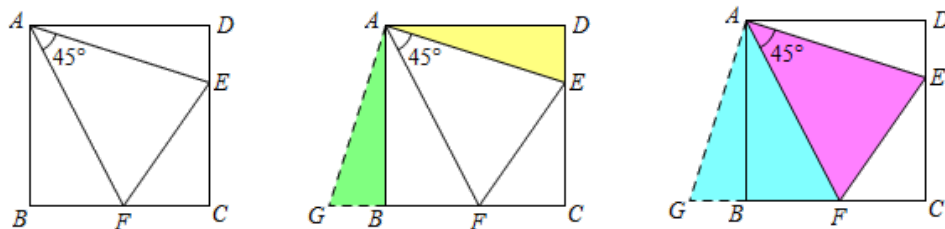


【标注】【知识点】等腰直角三角形中的半角模型

2. 正方形 90° 中含有 45°

半角在内向外转

如图, 正方形 $ABCD$, 点 E 在边 CD 上, 点 F 在边 BC 上, $\angle EAF = 45^\circ$.



辅助线: 延长 CB 至点 G , 使 $BG = DE$, 连接 AG . “补短法”

! 结论:

① 旋转全等: $\triangle ABG \cong \triangle ADE$, 理由 SAS .

② 对称全等: $\triangle FAG \cong \triangle FAE$, 理由 SAS .

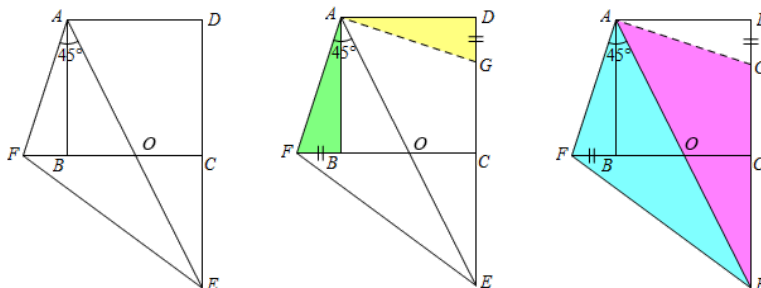
③ $EF = BF + DE$ (EF 、 BF 、 DE 的关系), 进而推出 $\triangle CEF$ 的周长等于正方形周长的 一半.

④ AF 平分 $\angle BFE$, AE 平分 $\angle DEF$.

⑤点 A 到 EF 的距离 = AB

半角在外向内转

如图, 正方形 $ABCD$, $\angle EOF = 45^\circ$, 旋转 $\angle EOF$ 与 DC 的延长线交于点 E , 与 CB 的延长线交于点 F



辅助线: 在 CD 截取 $DG = BF$, 连接 AG . “截长法”

! 结论:

① 旋转全等: $\triangle ABF \cong \triangle ADG$, 理由 SAS .

② 对称全等: $\triangle EAG \cong \triangle EAF$, 理由 SAS .

③ $EF = DE - BF$. (EF 、 BF 、 DE 的关系)

④ AE 平分 $\angle DEF$.

【备注】正方形角含半角模型实质上就是利用“截长补短”法构造全等三角形

注意: 辅助线描述 **不能够写旋转** , 要么写延长, 要么写截取。

半角模型核心就是做旋转, 如果不知道辅助线应该怎么画, 还是回忆旋转问题的解题通法:

① 先找共顶点的等线段;

② 边怎么转, 边所在三角形就怎么转。

因为是半角模型, 还会有自己特殊的结论:

③ 先证明一次旋转全等 (SAS)

④ 再寻找对称全等 (SAS)

注意, 半角模型倒角相等比较难写过程, 一定要带着学员把过程好好写一遍。

栗子2

3. 2020~2021学年天津和平区耀华嘉诚国际中学初二下学期期中第12题3分 ★★★

如图, 有一正方形的纸片 $ABCD$, 边长为 6 , 点 E 是 DC 边上一点且 $DC = 3DE$, 把 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠使 $\triangle ADE$ 落在 $\triangle AFE$ 的位置, 延长 EF 交 BC 边于点 G , 连接 BF . 有以下四个结论

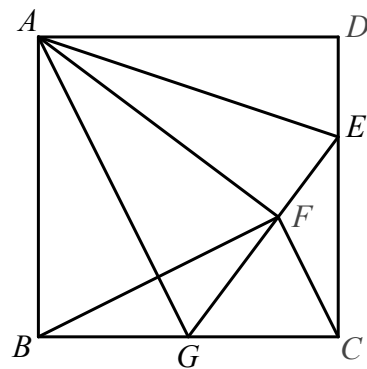
① $\angle GAE = 45^\circ$;

② $BG + DE = GE$;

③点 G 是 BC 的中点;

④连接 FC , 则 $BF \perp FC$.

其中正确的结论序号是 () .



A. ①②③④

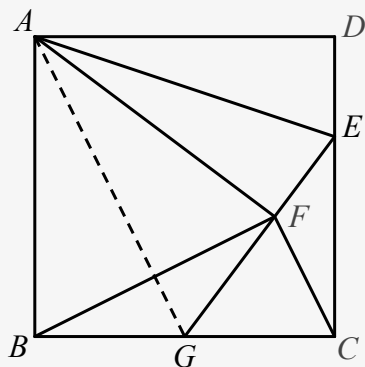
B. ①②③

C. ①②

D. ②③

【答案】 A

【解析】 连接 AG , AG 和 BF 交于 H , 如图所示 :



$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 6 , $DC = 3DE$,

$\therefore DE = 2$, $EC = 4$,

$\therefore$ 把 $\triangle ADE$ 沿 AE 折叠使 $\triangle ADE$ 落在 $\triangle AFE$ 的位置 ,

$\therefore AF = AD = AB = 6$, $EF = ED = 2$, $\angle AFE = \angle D = 90^\circ$, $\angle FAE = \angle DAE$,

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 和 $\text{Rt}\triangle AFG$ 中 , $\begin{cases} AB = AF \\ AG = AG \end{cases}$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ABG \cong \text{Rt}\triangle AFG$ (HL) ,

$\therefore GB = GF$, $\angle BAG = \angle FAG$,

$\angle GAE = \angle FAE + \angle FAG = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ$, ①正确 ;

$\therefore GE = GF + EF = BG + DE$, ②正确 ;

设 $BG = x$, 则 $GF = x$, $CG = BC - BG = 6 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle CGE$ 中 , $GE = x + 2$, $EC = 4$, $CG = 6 - x$,

$\therefore CG^2 + CE^2 = GE^2$,

$(6 - x)^2 + 4^2 = (x + 2)^2$, 解得 $x = 3$,

$\therefore BG = 3$, $CG = 6 - 3 = 3$,

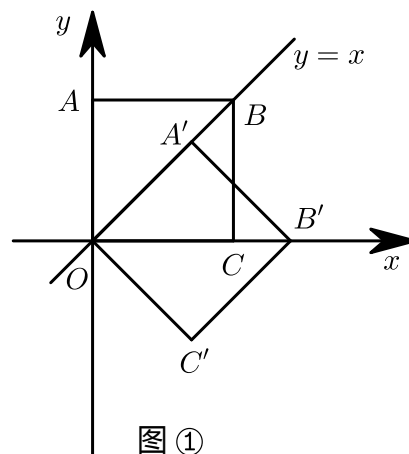
$\therefore BG = CG$ ，即点 G 为 BC 的中点，③正确；
 $\therefore GF = GC$ ，
 $\therefore \angle GFC = \angle GCF$ ，
 又 $\because \text{Rt}\triangle ABG \cong \text{Rt}\triangle AFG$ ，
 $\therefore \angle AGB = \angle AGF$ ，
 而 $\angle BGF = \angle GFC + \angle GCF$ ，
 $\therefore \angle AGB + \angle AGF = \angle GFC + \angle GCF$ ，
 $\therefore \angle AGB = \angle GCF$ ，
 $\therefore FC \parallel AG$ ，
 $\because AB = AF$ ， $BG = FG$ ，
 $\therefore AG \perp BF$ ，
 $\therefore BF \perp FC$ ，④正确；
 故选 A。

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

4. 2017~2018学年12月天津天津市益中学校初三上学期月考第24题 ★★★

在平面直角坐标系中， O 为原点，边长为2的正方形 $OABC$ 的两顶点 A ， C 分别在 y 轴、 x 轴的正半轴上，现将正方形 $OABC$ 绕点 O 顺时针旋转。

(1) 如图①，当点 A 的对应点 A' 落在直线 $y = x$ 上时，点 A' 的对应坐标为 _____；点 B 的对应点 B' 的坐标为 _____。



(2) 旋转过程中， AB 边交直线 $y = x$ 于点 M ， BC 边交 x 轴于点 N ，当 A 点第一次落在直线 $y = x$ 上时，停止旋转。

① 如图②，在正方形 $OABC$ 旋转的过程中，线段 AM ， MN ， NC 三者满足什么样的数量关系？请说明理由。

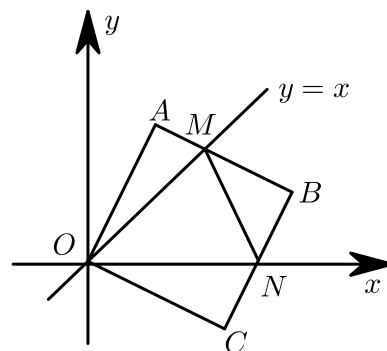


图 ②

② 当 $AC \parallel MN$ 时, 求 $\triangle MBN$ 内切圆的半径 (直接写出结果即可) .

【答案】 (1) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $(2\sqrt{2}, 0)$

(2)① $MN = AM + CN$, 证明见解析 .

② $6 - 4\sqrt{2}$.

【解析】 (1) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, 0)$.

(2)① $MN = AM + CN$,

理由如下: 延

长 BA 交 y 轴

于点 E ,

在正方形

$OABC$ 中 ,

有 $OA = OC$

$\angle C = \angle OAB = \angle AOC = 90^\circ$,

$\therefore \angle EAO = \angle C$,

$\because AB$ 边交直线 $y = x$ 于点 M ,

$\therefore \angle EOM = \angle MON = 45^\circ$,

$\therefore \angle AOE + \angle AOM = \angle CON + \angle AOM = 45^\circ$,

$\therefore \angle AOE = \angle CON$,

$\therefore \triangle OAE \cong \triangle OCN$,

$\because \angle EOM = \angle MON = 45^\circ$, $OM = OM$,

$\therefore \triangle OME \cong \triangle OMN$,

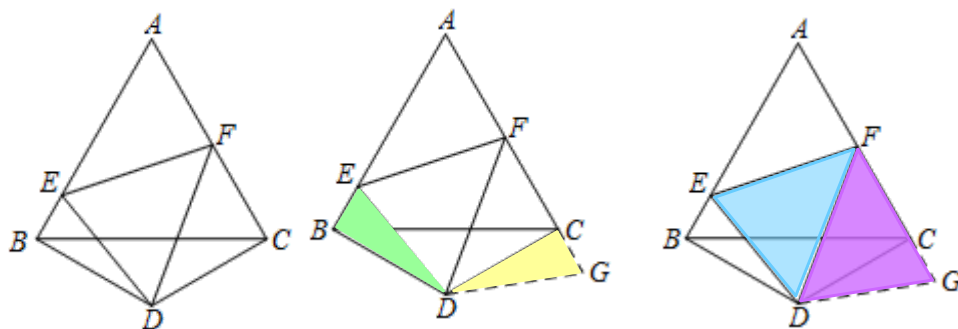
$\therefore MN = ME = AM + CN$.

② $6 - 4\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】ASA

3. 等腰三角形 120° 中含有 60°

如图，已知，等边 $\triangle ABC$ ， $DB = DC$ ， $\angle BDC = 120^\circ$ ， $\angle EDF = 60^\circ$ 。



辅助线：延长 AC 至 G ，使得 $CG = BE$ ，连接 DG 。

！结论：

①旋转全等： $\triangle DBE \cong \triangle DCG$ ， $DE = DG$ ， $\angle BDE = \angle CDG$ ，

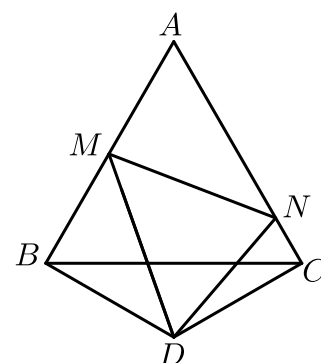
②对称全等：再证 $\triangle DEF \cong \triangle DGF$ ， $EF = GF$ ，

故 $EF = BE + CF$ 。（ EF 、 BE 、 CF 的关系）

栗子3

5. 2016~2017学年天津和平区初二上学期期中模拟第18题3分 ★★★

如图， $\triangle ABC$ 是边长为 10cm 的等边三角形， $\triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$ 。以 D 为顶点作一个 60° 角，使其两边分别交 AB 于点 M ，交 AC 于点 N ，连接 MN ，则 $\triangle AMN$ 的周长为 _____。



【答案】 20cm

【解析】 $\because \triangle BDC$ 是等腰三角形，且 $\angle BDC = 120^\circ$ ，

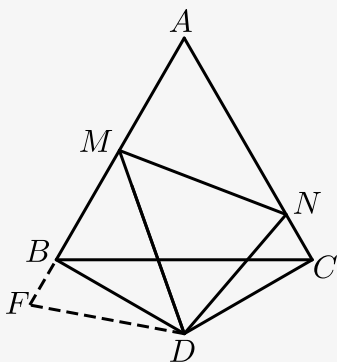
$$\therefore \angle BCD = \angle DBC = 30^\circ，$$

$\because \triangle ABC$ 是边长为 10cm 的等边三角形，

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \angle BCA = 60^\circ，$$

$$\therefore \angle DBA = \angle DCA = 90^\circ，$$

延长 AB 至 F ，使 $BF = CN$ ，连接 DF ，



在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDN$ 中 ,

$$\therefore \begin{cases} BF = CN \\ \angle FBD = \angle DCN , \\ DB = DC \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDN$ (SAS) ,

$\therefore \angle BDF = \angle CDN$, $DF = DN$,

$\therefore \angle MDN = 60^\circ$,

$\therefore \angle BDM + \angle CDN = 60^\circ$,

$\therefore \angle BDM + \angle BDF = 60^\circ$,

在 $\triangle DMN$ 和 $\triangle DMF$ 中 ,

$$\therefore \begin{cases} DM = MD \\ \angle FDM = \angle MDN , \\ DF = MF \end{cases}$$

$\therefore \triangle DMN \cong \triangle DMF$ (SAS) ,

$\therefore MN = MF$,

$\therefore \triangle AMN$ 的周长是 : $AM + AN + MN = AM + MB + BF + AN = AB + AC = 20$.

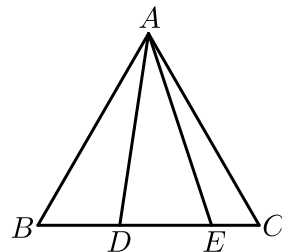
故答案为 : 20cm .

【标注】【知识点】等边三角形中的半角模型

变式

6. 2017~2018学年湖北鄂州初三上学期期中第15题3分 ★★★

如图 , 等边 $\triangle ABC$ 中 , D 、 E 为 BC 边上的点 , $BD = 2CE$, $\angle DAE = 30^\circ$, $DE = 3$, CE 的长为 _____ .



【答案】 $\frac{3\sqrt{7}}{7}$

【解析】将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle ACF$ ，作 $FH \perp BC$ 于 H 。

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB = BC = AC$ ， $\angle B = \angle BAC = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle DAF = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle CAF + \angle CAE = \angle BAD + \angle CAF = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle EAD = \angle EAF = 30^\circ$ ，

$\therefore AE = AE$ ， $AD = AF$ ，

$\therefore \triangle EAD \cong \triangle EAF$ ，

$\therefore DE = EF = 3$ ，设 $CE = x$ ，则

$BD = CF = 2x$ ，

$\therefore \angle ACF = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle FCH = 60^\circ$ ，

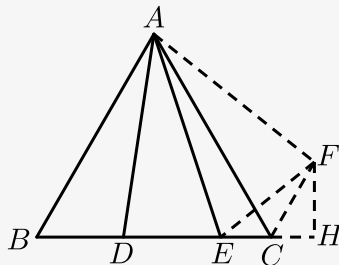
$\therefore CH = \frac{1}{2}CF = x$ ， $FH = \sqrt{3}x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle EFH$ 中， $EF^2 = EH^2 + FH^2$ ，

$\therefore 9 = 4x^2 + 3x^2$ ，

$\therefore x = \frac{3\sqrt{7}}{7}$ ，

故答案为 $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ 。



【标注】【知识点】等边三角形中的半角模型

独步天下1

7. 2021年辽宁沈阳沈河区初三中考一模第24题12分 ★★★★★

解答下列各题。

(1) 思维探究：

如图1，点 E ， F 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC ， CD 上，且 $\angle EAF = 45^\circ$ ，连接 EF ，则三条线段 EF ， BE ， DF 满足的等量关系式是 _____；小明的思路是：将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ABG$ 的位置，并说明点 G ， B ， E 在同一条直线上，然后证明 $\triangle AEF \cong$ _____ 即可得证结论。（只需填空，无需证明）

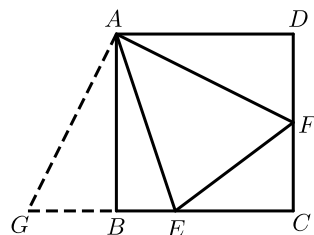


图1

(2) 思维延伸：

如图2, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D, E 均在边 BC 上, 点 D 在点 E 的左侧, 且 $\angle DAE = 45^\circ$. 猜想三条线段 BD, DE, EC 应满足的等量关系, 并说明理由.

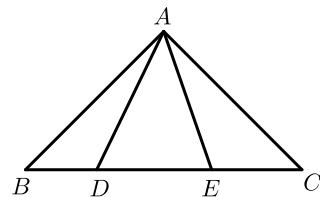


图2

(3) 思维拓广:

如图3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 60^\circ$, $AB = AC = 5$, 点 D, E 均在直线 BC 上, 点 D 在点 E 的左侧, 且 $\angle DAE = 30^\circ$, 当 $BD = 1$ 时, 请直接写出线段 CE 的长.

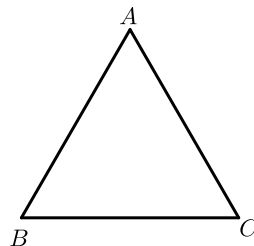


图3

【答案】 (1) $EF = BE + DF$; $\triangle AEG$

(2) $BD^2 + CE^2 = DE^2$, 证明见解析.

(3) $\frac{35}{11}$ 或 $\frac{5}{3}$.

【解析】 (1) 将 $\triangle ADF$ 绕点 A 顺时针旋转 90° 至 $\triangle ABG$,

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABG,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle ABG, DF = BG, AF = AG, \angle DAF = \angle BAG,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAD = \angle ADC = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABG = \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 G, B, E 在同一直线上,

$$\therefore \angle DAF + \angle BAF = \angle BAG + \angle BAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle GAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EAF = \angle EAG = 45^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle AEF \text{ 和 } \triangle AEG \text{ 中 } \begin{cases} AF = AG \\ \angle EAF = \angle EAG \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AEG (\text{SAS}),$$

$$\therefore EF = EG,$$

$$\therefore EG = BE + BG = BE + DF,$$

$$\therefore EF = BE + DF .$$

故答案为： $EF = BE + DF$, $\triangle AEG$.

(2) 把 $\triangle ACE$ 旋转到 ABF 的位置 , 连接 DF , 则 $\angle FAB = \angle CAE$.

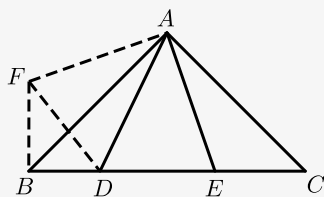


图 2

$$\because \angle BAC = 90^\circ , \angle DAE = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 45^\circ ,$$

$$\text{又} \because \angle FAB = \angle CAE ,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle DAE = 45^\circ ,$$

$$\text{则在 } \triangle ADF \text{ 和 } \triangle ADE \text{ 中 } \begin{cases} AD = AD \\ \angle FAD = \angle DAE , \\ AF = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ADE (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore DF = DE , \angle C = \angle ABF = 45^\circ ,$$

$$\therefore \angle BDF = 90^\circ ,$$

$\therefore \triangle BDF$ 是直角三角形 ,

$$\therefore BD^2 + BF^2 = DF^2 ,$$

$$\therefore BD^2 + CE^2 = DE^2 .$$

(3) 当点 D 在线段 BC 上时 , 将 $\triangle ACE$ 绕点 A 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle ABF$,

连接 DF , 过点 F 作 $FH \perp CB$ 交 CB 延长线于点 H ,

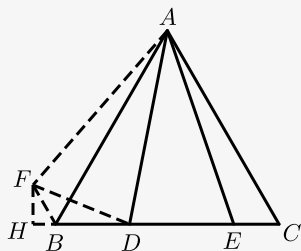


图 3

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ABF , \angle EAF = 60^\circ ,$$

$$\therefore AE = AF , \angle ACE = \angle ABF , CE = BF ,$$

$$\because \angle DAE = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DAF = 30^\circ ,$$

$$\text{在 } \triangle ADE \text{ 和 } \triangle ADF \text{ 中 } \begin{cases} AE = AF \\ \angle DAE = \angle DAF , \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ADF (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore DE = DF ,$$

$$\because AB = AC, \angle BAC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore \angle ACE = \angle ABC = 60^\circ, BC = AC = 5,$$

$$\therefore \angle ABF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FBH = 60^\circ,$$

$$\because FH \perp BH,$$

$$\therefore \angle FHB = 90^\circ, \angle HFB = 30^\circ,$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2}BF,$$

$$\text{设 } CE = BF = x, \text{ 则 } BH = \frac{1}{2}x, FH = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\because BD = 1, BC = 5,$$

$$\therefore DE = BC - BD - CE = 4 - x,$$

$$\therefore DF = 4 - x,$$

$$\therefore DH = BD + BH = 1 + \frac{1}{2}x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle FHD \text{ 中, } FH^2 + DH^2 = DF^2,$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 = (4 - x)^2,$$

$$\frac{3}{4}x^2 + 1 + x + \frac{1}{4}x^2 = 16 - 8x + x^2,$$

$$\text{即 } 9x = 15,$$

$$x = \frac{5}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{5}{3};$$

当点 D 在线段 CB 的延长线上时,

将 $\triangle ABD$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle ACM$,

连接 EM , 过点 M 作 $MN \perp BC$ 于点 N ,

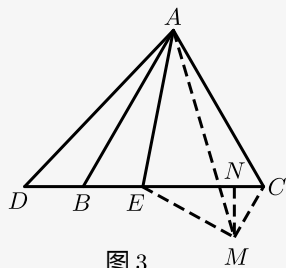


图 3

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACM, \angle DAM = 60^\circ,$$

$$\therefore AD = AM, BD = CM = 1, \angle ABD = \angle ACM,$$

$$\because \angle DAE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle MAE = 30^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle AED \text{ 和 } \triangle AEM \text{ 中 } \begin{cases} AD = AM \\ \angle DAE = \angle MAE \\ AE = AE \end{cases}$$

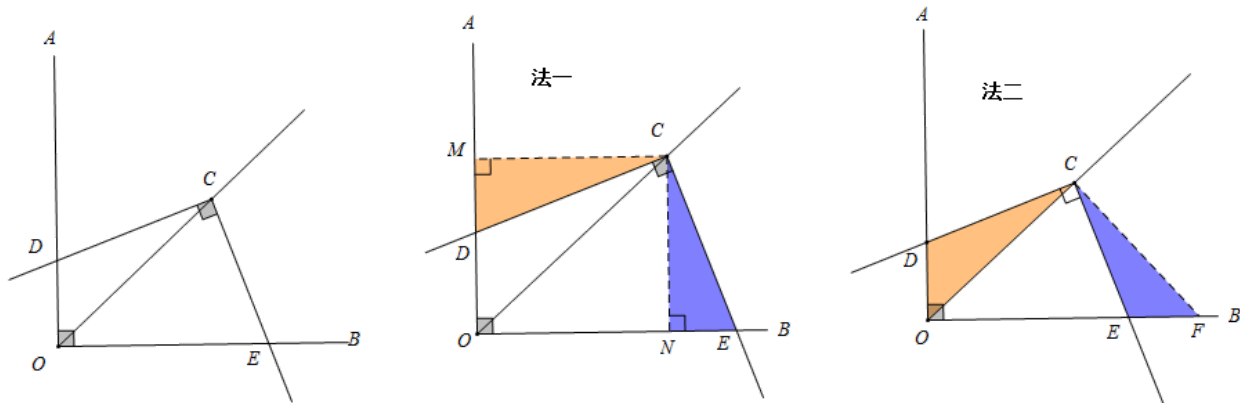
$$\therefore \triangle AED \cong \triangle AEM \text{ (SAS)},$$

$\therefore DE = ME$,
 $\because AB = AC$, $\angle BAC = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形 ,
 $\therefore BC = AC = 5$, $\angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ABD = \angle ACM = 60^\circ$,
 $\therefore \angle MCN = 60^\circ$,
 $\because MN \perp BC$,
 $\therefore \angle MNC = 90^\circ$, $\angle CMN = 30^\circ$,
 $\therefore NC = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2}$, $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 设 $CE = y$,
 则 $DE = ME = BC + BD - CE = 5 + 1 - y = 6 - y$, $EN = CE - CN = y - \frac{1}{2}$,
 在 $\text{Rt}\triangle ENM$ 中 , $EN^2 + MN^2 = EM^2$,
 $\therefore \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (6 - y)^2$,
 $\therefore y^2 - y + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 36 - 12y + y^2$,
 即 $11y = 35$,
 $y = \frac{35}{11}$,
 $\therefore CE = \frac{35}{11}$.
 综上所述 , 线段 CE 的长为 $\frac{5}{3}$ 或 $\frac{35}{11}$

【标注】【知识点】正方形中的半角模型

二、对角互补模型

如图 , 已知 $\angle AOB = \angle DCE = 90^\circ$, OC 平分 $\angle AOB$, D 、 E 在 OA 、 OB 上 .



法一 : 过点 C 作 $CM \perp OD$ 于 M , $CN \perp OB$ 于 N . 利用 AAS 证明 $\triangle CMD \cong \triangle CNE$.

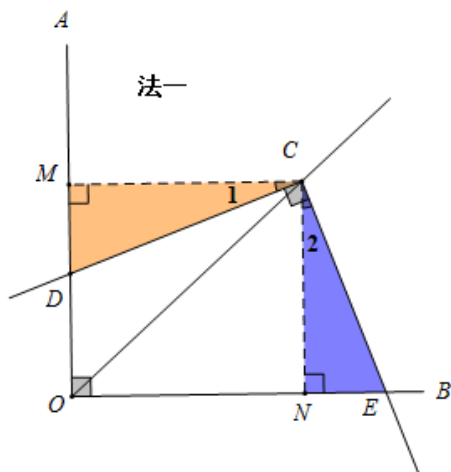
法二 : 将 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° 交 OB 于 F , 利用 ASA 证明 $\triangle CDO \cong \triangle CEF$.

! 结论:

- ① $CD = CE$;
 ② $OD + OE = OM + ON = \sqrt{2} OC$;
 ③ $S_{\text{四边形}ODCE} = \frac{1}{2} OC^2$.

【备注】

【法一】



证明: 过点C作 $CM \perp OD$ 与M, $CN \perp OB$ 于N

$\therefore OC$ 平分 $\angle AOC$, $\angle AOC = 90^\circ$

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 45^\circ$, $CM = CN$, $\angle MCN = 90^\circ$

$\therefore \angle DCE = 90^\circ$

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

在 $\triangle OBE$ 和 $\triangle OCF$ 中

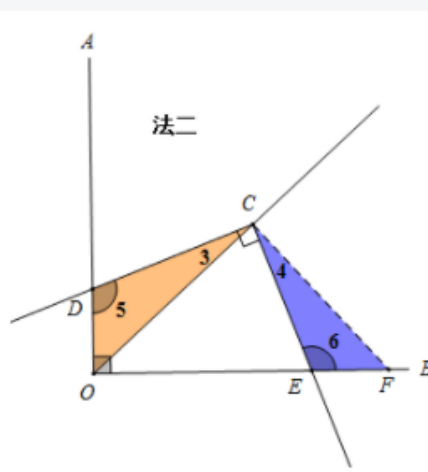
$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ CM = CN \\ \angle CMD = \angle CNE \end{cases}$$

$\therefore \triangle CMD \cong \triangle CNE (ASA)$

$\therefore CM = CE, MD = NE$

$\therefore OD + OE = OM + ON = \sqrt{2} OC$

【法二】



证明: 将CD绕点C逆时针旋转 90° 交OB于F

$\therefore \angle DCE = 90^\circ$

$\therefore \angle 3 = \angle 4$

$\therefore \angle AOB = \angle DCE = 90^\circ$

$\therefore \angle 5 + \angle CEO = 180^\circ$

$\therefore \angle 5 = \angle 6$

在 $\triangle CDO$ 和 $\triangle CEF$ 中

$$\begin{cases} \angle 3 = \angle 4 \\ \angle 5 = \angle 6 \\ OC = OC \end{cases}$$

$\therefore \triangle CDO \cong \triangle CEF$

① 旋转时, 令共顶点的等线段重合; 有时根据已知条件不做旋转说明, 而是进行截长补短的辅助线说明, 具体还要看题面条件。

② 我们通常将互补的一对角中的一个角转换成另一个角的邻补角进行解题。

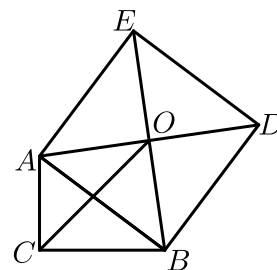
③ 学习程度好的学生可以两个方法都讲解, 能力步枪的学生建议只讲第二种方法。

④ 方法一: 对角互补条件满足后, 从一个角的顶点向补角的两边做垂线, 方法二: 对角互补条件满足后, 在另一对互补的角的其中一角旁构造三角形。

栗子4

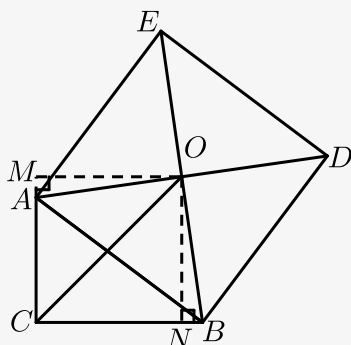
8. 2018年天津东丽区初三中考一模第17题3分 ★★★

如图, $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, 以斜边 AB 为边向外作正方形 $ABDE$, 且正方形对角线交于点 O , 连接 OC , 已知 $AC = 3$, $BC = 4$, 则 OC 的长为 _____ cm .



【答案】 $\frac{7\sqrt{2}}{2}$

【解析】 过O作 $OM \perp CA$ 于M，作 $ON \perp CB$ 于N，



$$\therefore \angle OMC = \angle DNC = 90^\circ,$$

又 $\angle ACB = 90^\circ$ ，则四边形 $MCNO$ 是矩形，

$$\therefore \angle MON = 90^\circ,$$

$\because$ 正方形 $ABDE$ 对角线交于O点， $OA = OB$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle MON - \angle AON = \angle AOB - \angle AON,$$

$$\therefore \angle AOM = \angle NOB,$$

$$\because \angle OMA = \angle ONB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOM \cong \triangle BON (\text{AAS}),$$

$$\therefore OM = ON, AM = BN,$$

$$\because AC = 3, BC = 4, \text{得 } CN = \frac{AC + BC}{2} = 3.5,$$

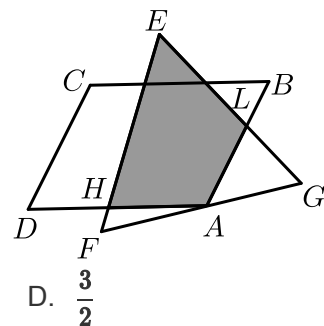
$$\because \angle OCN = 45^\circ,$$

$$\therefore ON = CN = \frac{7}{2}, \text{则 } OC = \frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】正方形与全等综合

9. 2020~2021学年天津和平区天津市益中学校初二下学期期中第11题3分 ★★★

如图，平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 是等边 $\triangle EFG$ 边 FG 的中点， $\angle B = 60^\circ$ ， $EF = 2$ ，则阴影部分的面积为（ ）。



A. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

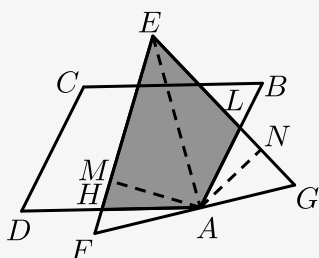
B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】如图作 $AM \perp EF$ 于 M ， $AN \perp EG$ 于 N ，连接 AE ，



$\because \triangle EFG$ 是等边三角形， $AF = AG$ ，

$\therefore \angle AEF = \angle AEG$ ，

$\because AM \perp EF$ ， $AN \perp EG$ ，

$\therefore AM = AN$ ，

$\because \angle MEN = 60^\circ$ ， $\angle EMA = \angle ENA = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle MAN = 120^\circ$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore BC \parallel AD$ ，

$\therefore \angle DAB = 180^\circ - \angle B = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle MAN = \angle DAB$ ，

$\therefore \angle MAH = \angle NAL$ ，

$\therefore \triangle AMH \cong \triangle ANL$ ，

$\therefore S_{\text{阴}} = S_{\text{四边形} AMEN}$ ，

$\therefore EF = 2$ ， $AF = 1$ ，

$\therefore AE = \sqrt{3}$ ， $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $EM = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore S_{\text{四边形} AMEN} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，

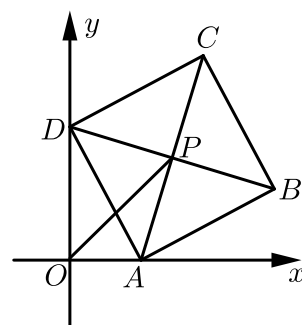
$\therefore S_{\text{阴}} = S_{\text{四边形} AMEN} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 。

故选 A。

【标注】【知识点】对角互补模型

10. 2015~2016学年北京西城区西城外国语初二下学期期中第24题5分 ★★★★★

已知：如图，平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，它的顶点 A 在 x 轴的正半轴上运动，顶点 D 在 y 轴的正半轴上运动（点 A ， D 都不与原点重合），顶点 B ， C 都在第一象限，且对角线 AC ， BD 相交于点 P ，连接 OP 。



- (1) 当 $OA = OD$ 时，点 D 的坐标为 _____， $\angle POA =$ _____ $^{\circ}$ 。
 (2) 当 $OA < OD$ 时，求证： OP 平分 $\angle DOA$ 。
 (3) 设点 P 到 y 轴的距离为 d ，则在点 A ， D 运动的过程中， d 的取值范围是 _____。

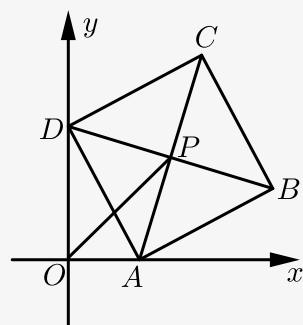
【答案】 (1) $(0, 2\sqrt{2})$ ；45

(2) 证明见解析。

(3) $2 < d \leq 2\sqrt{2}$

【解析】 (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore \triangle ADP$ 是等腰直角三角形，



又 $\because OA = OD$ ，

$\therefore \triangle AOD$ 是等腰直角三角形，

$\therefore$ 四边形 $AODP$ 是正方形，

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 4，

$\therefore AC = BD = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ，

$\therefore AP = DP = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(0, 2\sqrt{2})$ ， $\angle POA = 45^{\circ}$ 。

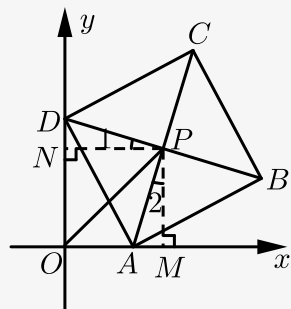
(2) 如图，过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M ， $PN \perp y$ 轴于点 N ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore PD = PA$ ， $\angle DPA = 90^{\circ}$ ，

$\because PM \perp x$ 轴于点 M , $PN \perp y$ 轴于点 N ,

$\therefore \angle PMO = \angle PNO = \angle PND = 90^\circ$,



$\because \angle NOM = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $NOMP$ 中, $\angle NPM = 90^\circ$,

$\therefore \angle DPA = \angle NPM$,

$\because \angle 1 = \angle DPA - \angle NPA$, $\angle 2 = \angle NPM - \angle NPA$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore$ 在 $\triangle DPN$ 和 $\triangle APM$ 中,
$$\begin{cases} \angle PND = \angle PMA \\ \angle 1 = \angle 2 \\ PD = PA \end{cases},$$

$\therefore \triangle DPN \cong \triangle APM$ (AAS),

$\therefore PN = PM$,

$\therefore OP$ 平分 $\angle DOA$.

(3) 当 A 、 O 重合时, 点 P 到 y 轴的距离最小,

$$d = \frac{1}{2} \times 4 = 2,$$

当 $OA = OD$ 时, 点 P 到 y 轴的距离最大, $d = PD = 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点 A 、 D 都不与原点重合,

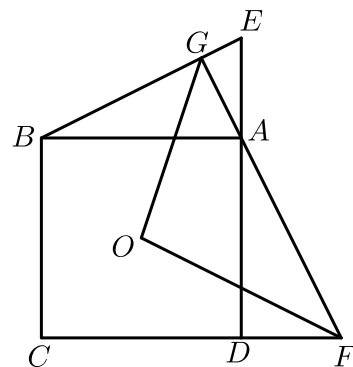
$\therefore 2 < d \leq 2\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】坐标系中的动点问题 (非函数)

独步天下2

11. ★★★

点 O 为正方形 $ABCD$ 的中心, 点 E 、 F 分别在 DA 、 CD 的延长线上, $AE = DF$, 连接 BE 、 AF , 延长 FA 交 BE 于 G , 连接 OG .



- (1) 求证： $BE \perp AF$.
- (2) 求 $\angle BGO$ 的度数 .
- (3) 若 $AE = 1$, $AB = 2$, 求 AG 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 45° .

(3) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】 (1) 易证 $\triangle ABE \cong \triangle DAF$,

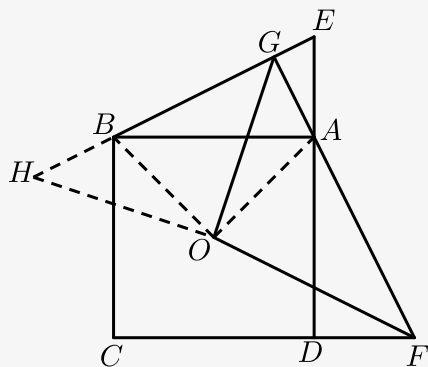
$$\therefore \angle E = \angle AFD ,$$

$$\because \angle AFD + \angle DAF = 90^\circ , \angle DAF = \angle GAE ,$$

$$\therefore \angle E + \angle GAE = 90^\circ ,$$

$$\therefore BE \perp AF .$$

(2) 连接 AO , BO ,



四边形 $AOBG$ 为对角互补，邻边相等的基本模型，可用旋转法，也可过 O 向 BG ,

GA 作垂线段，用旋转法，将 $\triangle OAG$ 绕点 O 逆时针旋转到 $\triangle OBH$,

$$\angle OAG = \angle OBH , OG = OH , \angle AOG = \angle BOH ,$$

$$\text{又 } \angle AOB = 90^\circ , \angle OAG + \angle OBG = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle OBH + \angle OBG = 180^\circ , \angle GOH = \angle AOB = 90^\circ ,$$

$$\therefore G , B , H \text{ 共线 , } \triangle OGH \text{ 是等腰直角三角形 ,}$$

$$\therefore \angle BGO = 45^\circ .$$

(3) $\because AE = 1 , AB = 2$,

$$\therefore BE = \sqrt{5},$$

$$\text{由面积法 } AG = \frac{1 \times 2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

【标注】【知识点】对角互补模型